

## LE RUGHE DELLA TERRA DISEGNATE DALL'ACQUA E LA GEOMETRIA MONO E MULTIFRATTALE

di Massimo Veltri e Samuele De Bartolo

*La geometria frattale, unitamente alle misure di campi multifrattali, svolge un ruolo di fondamentale importanza per la comprensione di molti fenomeni complessi presenti in natura in quanto caratterizza dettagliatamente gli aspetti essenziali strettamente connessi alla scala di osservazione, dove la dimensione frattale rappresenta l'invariante di riscaldamento. In questo contesto la geomorfologia fluviale ha sviluppato nuove metodologie morfometriche in grado di analizzare, attraverso scale di osservazione sempre più particolareggiate, tutte quelle caratteristiche fisiche descrittive le dinamiche fluviali, le portate e il trasporto solido nelle biforcazioni e nelle confluenze, il deposito e lo stesso meccanismo di formazione dell'intera rete di canali naturali.*

### 1. Introduzione

I fiumi sono stati una presenza costante nella storia delle grandi civiltà urbane del passato. E se fu proprio la presenza di essi a permettere il sorgere e l'evolversi di realtà umane organizzate, con l'andare del tempo rigoroso è stato lo sviluppo di analisi e di studi scientifici inerenti il loro regime e il loro evolversi in riferimento all'influenza sui territori circostanti e sulla possibilità di controllarne e utilizzarne la potenza. Nacque così l'esigenza di rappresentare su mappe dettagliate la rete fluviale nella sua interezza. Si ricorda a tal proposito, fra tutte, la famosa opera dei cartografi *Sung* (1137 d.C.), denominata *Carta dei sentieri di Yü* (il Grande) o *Yü Chi Thu*, scolpita su una lastra di pietra quadrata di un metro circa di lato, in cui è rappresentato un reticolo geografico avente maglie di lato pari a 100li, equivalenti a circa 41,4 km. In essa la precisione del profilo costiero e della rete dei sistemi fluviali può considerarsi straordinaria se rapportata alle odierne carte topografiche.

Con il passare dei secoli, la rappresentazione dei sistemi fluviali su mappe si sviluppò con sempre maggiore precisione, fino ad arrivare ai giorni nostri con il parallelo sviluppo tecnologico del rilevamento topografico, attualmente ben strutturato nei sistemi informatizzati geografici (*Geographic Information Systems, GIS*), grazie alle procedure di foto-restituzione aerea e satellitare e ai modelli digitali del terreno (*Digital Elevation Models, DEM*). Ebbe inizio, così, una nuova disciplina scientifica quali-quantitativa di analisi morfometrica delle reti fluviali: la morfometria fluviale [1, 2], le cui basi sono da ricercare nell'ambito più generale della geomorfologia e in particolare di quella fluviale.

Come è noto la geomorfologia è la scienza che si occupa dello studio e dell'interpretazione delle forme della superficie terrestre e, in particolare, delle cause che le generano e le modificano. La morfologia terrestre risulta dall'interazione congiunta di cause o, meglio, processi endogeni ed esogeni. La superficie terrestre, considerata essenzialmente come superficie di contatto fra l'atmosfera e l'idrosfera, viene assoggettata a forze che sono interne, dovute alla materia che costituisce il globo terrestre e che provocano deformazione della litosfera; e a forze esterne, dovute a due fattori principali, la gravità terrestre e l'energia solare, i quali determinano movimenti di porzioni di masse solide, liquide o aeriformi presso l'interfaccia del paesaggio terrestre. Tra i processi di natura esogena, di fondamentale importanza sono quelli dovuti a fenomeni di modellazione fluviale. Infatti, i fiumi, attraverso la loro capacità erosiva, di trasporto e di deposito, influiscono in misura significativa sulla morfologia del terreno. Pertanto, l'evoluzione del paesaggio fluviale è un processo strettamente legato all'erosione superficiale e coinvolge un ampio intervallo di scala, che oscilla tra l'ordine dei centimetri, nel caso in cui la piccola erosione dovuta ai rigagnoli costituisce la parte non permanente delle configurazioni di drenaggio, e la scala continentale, in cui le caratteristiche di erosione dipendono da processi geologici ben più macroscopici. Nella definizione attuale, la geomorfologia fluviale si occupa parimenti, oltre che della comprensione dei meccanismi evolutivi delle reti di drenaggio, anche dei criteri di descrizione e classificazione.

È importante, altresì, sottolineare che negli ultimi decenni la geomorfologia fluviale ha assunto una connotazione differente, grazie anche ai nuovi sviluppi morfometrici strettamen-

te connessi sia alla teoria matematica dei grafi che alla geometria frattale. Proprio quest'ultima rappresenta un nuovo approccio metodologico di studio e di approfondimento teorico-sperimentale attraverso il quale si ha la possibilità di comprendere meglio i meccanismi fisici e di scala che stanno alla base della formazione e dell'organizzazione delle reti di drenaggio fluviale. Essa può essere considerata come un campo intermedio tra l'ideale ordine geometrico euclideo e il caos geometrico dell'irregolarità e della frammentazione, ovvero come primo persuasivo linguaggio visuale delle forme complesse presenti in natura.

Nel 1982, Benoit Mandelbrot introducendo il tema principale del suo libro *The Fractal Geometry of Nature* con la frase: «*le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le linee di costa non sono cerchi...*» [3] parafrasò quell'ordine euclideo della natura che Galileo Galilei aveva evidenziato mediante il linguaggio matematico dei cerchi, dei triangoli e di altre figure geometriche.

Il termine *frattale*, coniato dallo stesso Mandelbrot verso la metà degli anni Settanta, deriva dal latino *fractus* (verbo *frangere*) e indica l'irregolare, l'interrotto e il frammentato geometrico.

È ormai risaputo che molte di quelle cosiddette "patologie" matematiche di fine Ottocento (ad esempio, la curva continua di Weierstrass non derivabile in nessun punto e quella di Peano passante per tutti i punti di un quadrato) hanno avuto in ragione della geometria frattale una nuova riqualificazione scientifica nell'armonia del caos, ovvero nell'armonia dell'*auto-somiglianza*, (*self-similarity*), estensione quest'ultima di una delle più importanti nozioni della geometria elementare: la similitudine. Un oggetto è auto-somigliante se può essere decomposto in copie più piccole di se stesso.

Possiamo ora fornire una prima intuitiva definizione di frattale come quell'insieme in cui esiste un'auto-somiglianza tra la parte e il tutto.

Una definizione più restrittiva, dello stesso Mandelbrot, è quella di insieme la cui dimensione di Hausdorff è strettamente maggiore di quella topologica.

Da queste due definizioni emerge la necessità che, per definire frattale un insieme, deve sussistere la contemporanea condizione di autosomiglianza e di dimensione di Hausdorff *non intera* (ad esempio, per il triangolo di Sierpinski,  $T_s$ , riportato in Figura 1, pari al rapporto  $\log 3/\log 2$ ).

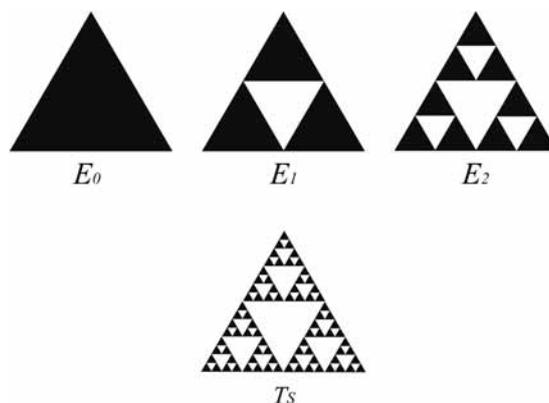


Figura 1: triangolo di Sierpinski,  $T_s$ , ottenuto mediante rimozione in ogni triangolo equilatero  $E_k$  del quarto centrale capovolto

I frattali possono essere, altresì, rispettivamente suddivisi in funzione dell'invarianza rispetto alle trasformazioni auto-somiglianti e auto-affini che li hanno generati [3]. I frattali auto-somiglianti (*self-similar fractals*) saranno pertanto caratterizzati dalla cosiddetta *auto-somiglianza di scala*, ossia dall'invarianza rispetto alle trasformazioni di auto-somiglianza, mentre i frattali auto-affini (*self-affine fractals*) dall'*auto-affinità di scala*, ovvero dall'invarianza rispetto alle trasformazioni affini (trasformazioni lineari

associate a traslazioni). Si ricorda brevemente che un oggetto è auto-affine quando può essere decomposto nell'unione di  $n$  distinti sottoinsiemi non-intersecantisi, ognuno dei quali in modo anisotropo congruente all'originario. Cambiamento di scala anisotropo significa che il fattore usato per calcolare le coordinate dell'oggetto ingrandito o ridotto dipende dalla direzione, ovvero dai differenti rapporti di scala utilizzati. Un'ulteriore suddivisione dei precedenti gruppi differenzia i frattali in statisticamente auto-somi-

glianti e statisticamente auto-affini. I primi sono caratterizzati dalla stessa distribuzione statistica delle parti rispetto al tutto, mentre i secondi dalla medesima distribuzione delle parti in ragione dei differenti fattori di scala utilizzati. Spesso tale ulteriore suddivisione viene utilizzata per raggruppare i cosiddetti frattali casuali (*random fractals*), cioè quei frattali in cui viene introdotto un elemento casuale ad ogni passo di costruzione, producendo come risultato finale la medesima variabilità su tutte le scale.

I concetti di auto-somiglianza e auto-affinità di scala sono ben noti in fisica come leggi di riscaldamento (*scaling laws*). Nel campo termodinamico l'ipotesi di riscaldamento (*scaling hypothesis*), ovvero il modo in cui quantità diverse variano a seguito di un cambiamento nella scala delle lunghezze, costituisce uno dei concetti più importanti dell'invarianza di scala. Tale ipotesi afferma che la lunghezza di correlazione,  $\xi$ , cioè una misura della *memoria* delle variazioni spaziali di una data grandezza fisica (ad esempio, la temperatura), è l'unica lunghezza caratteristica che il sistema (termodinamico) ha nell'intorno di  $t = 0$  (tempo), in funzione della quale devono essere misurate tutte le altre lunghezze. Un modo di realizzare tale ipotesi di riscaldamento è di assumere che una quantità di dimensione  $l^{-D}$  ( $l$  = lunghezza) vicino al punto critico (di transizione) sia proporzionale a  $\xi^{-D}$ . L'invariante nella legge di riscaldamento è rappresentato dalla dimensione frattale ( $D$ ), quest'ultima di difficile determinazione nel senso rigoroso di Hausdorff. Nei casi reali, viene stimata generalmente mediante la *dimensione di box-counting*,  $D_B$ , (*box dimension* o *box counting dimension*). Ritornando al concetto di invarianza di scala, possiamo affermare intuitivamente che essa sussiste se, ingrandendo una parte del sistema fino a raggiungere le dimensioni del sistema iniziale, non si è in grado di dire quali differenze ci siano tra questo e la sua parte ingrandita.

## 2. I nuovi scenari della geomorfologia fluviale: dalla monofrattalità alla multifrattalità dei corsi d'acqua naturali

Nel 1969 Ronald L. Shreve scrisse nell'introduzione al suo "*Stream lengths and basin areas in topologically random channel networks*" [4] che la geometria del bacino di drenaggio e della rete

idrografica costituisce prerequisito di fondamentale importanza per la comprensione dei processi fisici che regolano tanto l'uno quanto l'altra.

Gli studi e i risultati della geomorfologia quantitativa hanno contribuito in misura determinante nel fornire risposte all'assunto di Shreve, ma ruolo decisivo è stato rivestito dalla geometria frattale.

Essa ha svolto, nell'ultimo ventennio, un compito straordinario per l'interpretazione di molti fenomeni complessi presenti in natura. Il suo campo di applicazione, infatti, abbraccia svariati settori della scienza applicata.

Si spazia dai sistemi dinamici non lineari alla turbolenza, dalla dinamica dei mercati azionari alla distribuzione dei terremoti, dalla geometria dei neuroni alla geometria delle reti idrografiche, dai campi di intensità delle piogge alla caratterizzazione delle proprietà di scala di alcune delle più importanti variabili idraulico-idrologiche quali, ad esempio, le aree contribuenti ad un determinato ordine, le loro pendenze, l'energia dissipata, la funzione di iniziazione (*initiation function*) e la funzione d'ampiezza, le reti ottimali di canali.

In particolare, con specifico riguardo alla forma strutturale delle reti fluviali, considerate da Rodriguez-Iturbe e Rinaldo [5] come intricate strutture spaziali auto-organizzate, Ijjasz-Vasquez et al. [6], De Bartolo et al. [7, 8, 9, 10, 11, 12] e Gaudio et al. [13] hanno evidenziato il loro comportamento multifrattale, analogo a quelle di altre forme complesse presenti in natura quali ad esempio i processi di aggregazione per diffusione limitata (*Diffusion Limited Aggregation*, DLA) e la differenziazione delle celle neuronali.

La descrizione quantitativa delle reti fluviali risale ai lavori di Horton [1, 2] il quale si occupò dapprima della genesi dei reticoli di drenaggio e quindi delle leggi che ne regolano la struttura, tipicamente dendritica, proponendo un criterio di classificazione dei singoli rami di tipo gerarchico, in seguito sviluppato e modificato da Strahler [14, 15]. Attraverso i rapporti di biforcazione,  $R_B$ , e di lunghezza,  $R_L$ , contenuti nelle leggi hortoniane relative al numero, alla lunghezza media e alla pendenza media delle aste fluviali di un dato ordine gerarchico, La Barbera e Rosso [16] hanno proposto nel 1987 la prima formulazione della dimensione frattale,  $D$ , delle reti idrografiche:

$$D = \log R_B / \log R_L, \quad (1)$$

assumendo i rapporti hortoniani costanti nell'intero bacino e indipendenti dalla scala di osservazione.

I frattali venivano proposti come strumento innovativo per lo sviluppo di nuovi scenari interpretativi della geomorfologia fluviale.

Altri autori, partendo da considerazioni analoghe e riformulando i contributi originari di Mandelbrot [17, 18] sull'utilizzo della dimensione frattale, sono pervenuti ad ulteriori affinamenti teorici, tra i quali la combinazione della frattalità della singola asta fluviale,  $D_s$ , pari all'incirca a 1.1, con la frattalità,  $D_b$ , della struttura ad albero per il calcolo della dimensione frattale dell'intera rete idrografica,  $D_{cn}$ :

$$D_{cn} = D_s D_b. (2) \dots\dots\dots .. (2)$$

Tuttavia, i valori riscontrati nello studio di reti di bacini naturali hanno evidenziato com-

portamenti anomali, uguagliando e anche superando la dimensione del piano euclideo e portando alcuni autori [19] ad interpretare tali anomalie come comportamento tipicamente *space-filling* delle reti idrografiche, cioè come quella tendenza della struttura fluviale a ricoprire interamente il piano topografico. In Figura 2 è mostrata la struttura dendritica del drenaggio fluviale del fiume Petrace (Calabria), mentre in Tabella 1 sono riportati i risultati relativi al calcolo delle dimensioni frattali  $D$  e  $D_{cn}$  riguardanti alcuni reticoli fluviali calabresi e cioè quelle dell'Ancinale, Crati, Petrace, Savuto e Trionto.

Claps e Oliveto [20], nello studio di 23 reti fluviali dell'Italia meridionale, hanno riscontrato, al contrario, una bassa variabilità dei valori medi della dimensione frattale, sempre inferiori a 2, giungendo a negare recisamente il comportamento *plane-filling*.



Figura 2: rete idrografica del Petrace (Calabria)

Fiume	$R_B$	$R_L$	$D$	$D_s$	$D_{cn}$
Ancinale	5.559	2.588	1.595	1.1	1.755
Crati	4.184	1.913	2.207	1.1	2.427
Petrace	3.425	1.839	2.020	1.1	2.222
Savuto	4.578	2.471	1.682	1.1	1.850
Trionto	4.157	2.231	1.776	1.1	1.953

Tabella 1: risultati relativi al calcolo delle dimensioni frattali  $D$  e  $D_{cn}$  riguardanti le reti fluviali dell'Ancinale, Crati, Petrace, Savuto e Trionto

Beauvais e Montgomery [21] hanno ritenuto che i rapporti di Horton siano da considerare inadeguati per la stima della dimensione frattale, poiché implicano l'assunzione dell'auto-somiglianza statistica delle reti fluviali, della quale non si ha alcuna prova. Gli autori hanno criticato tali leggi, che spesso hanno portato a valori delle dimensioni frattali anche superiori a 2 (Tarboton et al. [19]; Helmlinger et al. [22]), concludendo che i reticoli idrografici, nonostante la loro seducente architettura ramificata, non possono essere considerati statisticamente auto-somiglianti, cioè aventi natura frattale.

Nikora e Sapozhnikov [23], invece, hanno evidenziato come molte reti idrografiche esibiscono un comportamento frattale auto-affine, caratterizzato da esponenti di scala differenti nelle direzioni longitudinali e trasversali della struttura fluviale, la cui dimensione può essere ricondotta a quella di *lacunarity* [3].

Contemporaneamente agli studi sopra citati, e cioè già a partire dagli inizi degli anni Novanta del secolo scorso, l'interpretazione geometrica e frattale delle reti fluviali ha assunto una connotazione differente grazie all'utilizzo di particolari procedure di stima della dimensione frattale.

Gli studi condotti in tal senso da De Bartolo et al. [8, 9, 10, 11, 12] hanno dimostrato che l'analisi mono-frattale delle reti fluviali può essere generalizzata e al contempo affinata attraverso l'utilizzo dei campi multifrattali: infatti i recenti sviluppi della teoria del caos hanno mostrato che la complessità di molti fenomeni presenti in natura è regolata da frattali esibenti caratteristiche di riscaldamento (*scaling*) ben più articolate di quelle mono-frattali [24]. Tali strutture, usualmente, coinvolgono un intervallo di scale che può dipendere dalla loro locazione all'interno dell'insieme in esame. Pertanto da un comportamento a riscaldamento semplice si passa a uno multiplo, e i frattali a esso corrispondenti si definiscono multifrattali.

La teoria multifrattale fu introdotta, come si è detto, per la prima volta da Mandelbrot agli inizi degli anni Settanta con due contributi originali sulla turbolenza. Successivamente, a metà degli anni Ottanta, essa venne sviluppata negli aspetti formali, sempre nello studio di alcuni fenomeni dissipativi turbolenti, dai fisici Frisch e Parisi [25] e ulteriormente perfezionata da Badii e Politi [26] e Halsey [27], con l'analisi particolareggiata degli *attrattori strani* nella teoria dei sistemi dinamici.

Parallelamente agli studi sopra menzionati, sempre verso gli inizi degli anni Ottanta del secolo scorso, Hentschel e Procaccia [28] proposero un formalismo analogo basato sullo sviluppo delle *entropie* di Rényi [29], queste ultime risalenti già alla metà degli anni Cinquanta dello stesso secolo.

Esso risulta caratterizzato da una famiglia parametrica di dimensioni frattali,  $D_q$ , nota come *dimensione generalizzata di Rényi* o *spettro delle dimensioni frattali generalizzate*, in cui il parametro discriminate,  $q$ , è un esponente adottato per la costruzione dei momenti della distribuzione delle misure, trattate in termini probabilistici.

In particolare, per quanto concerne le reti fluviali, attraverso il complesso delle misure multifrattali rappresentate dalla naturale distribuzione dei *net-points*, quest'ultimi intesi come discretizzazione delle reti su supporto bi-dimensionale del rilievo topografico, è stato possibile definire uno spettro di dimensioni frattali generalizzate  $D_q$ .

Tale spettro è risultato comprensivo, nel suo insieme, di tutte le dimensioni frattali associate ad ogni singola sottostruttura di rete o porzione di essa, ciascuna delle quali caratterizzata da un proprio esponente di scala, noto in letteratura come *crowding index* ovvero esponente di Lipschitz-Hölder,  $\alpha$  [3].

Le dimensioni frattali generalizzate com'è facile intuire sono caratterizzate dall'esponente  $q$ , cioè un indicatore di frequenza il quale attribuisce pesi differenti a seconda se la rete idrografica possiede caratteristiche di maggiore o minore densità di drenaggio e sono indicate anche attraverso la notazione,  $f(\alpha_q)$ , ovvero lo spettro delle singolarità di Halsey et al. [27], quest'ultimo definibile attraverso la trasformata di Legendre, rappresentata dalla seguente coppia di relazioni:

$$\alpha_q = -d\tau_q/dq; f(\alpha_q) = \tau_q + q\alpha_q, \dots \dots \dots (3)$$

le quali associano in modo parametrico, attraverso  $q$ , le singolarità  $\alpha$  alle dimensioni  $f$ . Questa corrispondenza, com'è facile osservare nella relazione (3), avviene mediante l'utilizzo di una opportuna funzione di scala,  $\tau_q$ , denominata in letteratura come *sequenza degli esponenti di massa* il cui calcolo risulta essere un prerequisito fondamentale per la valutazione delle misure multifrattali.

In generale, l'analisi degli spettri multifrattali,  $D_q$  e  $f(\alpha_q)$ , viene affrontata mediante procedure numeriche basate su due differenti classi di algoritmi di ricoprimento delle reti fluviali, le quali sono in relazione tra loro e forniscono, per multifrattali deterministici, risultati equivalenti.

La prima rientra nella categoria degli algoritmi a massa fissa (*Fixed Size Algorithms*, FSA), mentre la seconda nella categoria degli algoritmi a massa variabile (*Fixed Mass Algorithms*, FMA).

Recentemente, De Bartolo et al. [8, 9, 10, 11, 12] hanno affrontato l'analisi multifrattale di alcune reti idrografiche calabresi attraverso l'utilizzo di entrambe le classi algoritmiche sopra menzionate e i risultati hanno affermato oltre

che una buona convergenza delle due procedure che l'approccio multifrattale può rappresentare un elemento decisivo per la comprensione dei meccanismi che regolano la formazione dei deflussi superficiali e di piena, principalmente nel definire quale sia, in termini di risposta idrologica, il ruolo delle diverse strutture monofrattali costituenti la rete idrografica nel suo complesso.

Nella Figura 3 è riportato come esempio di comportamento a riscaldamento multiplo delle reti idrografiche l'andamento degli spettri multifrattali della rete idrografica del Corace (Calabria) a differenti risoluzioni spaziali ottenuto con l'ausilio del metodo a massa fissa.

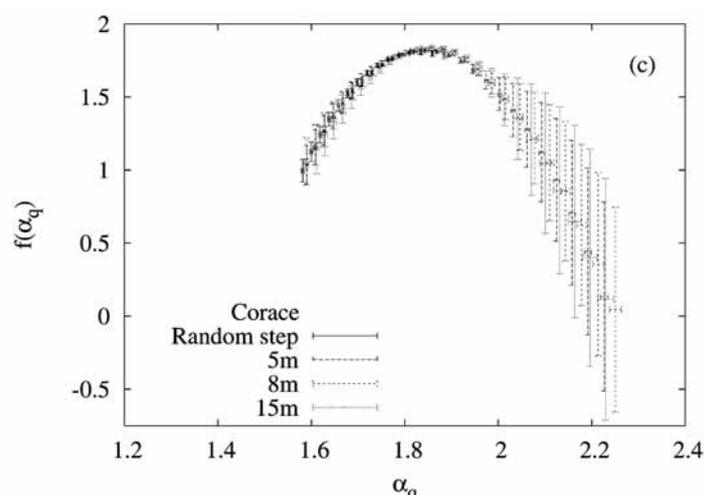


Figura 3: spettri multifrattali della rete idrografica del Corace (Calabria) a differenti risoluzioni spaziali; metodo FMA

Tale comportamento multifrattale rappresenta pertanto contemporaneamente sia un indice della complessità delle reti fluviali nelle scale di bacino e locali cioè di canale con la potenziale formazione di canali intrecciati (*braided channels*), sia un indicatore delle caratteristiche litologiche del supporto soggetto all'erosione e al drenaggio. Infatti, tali caratteristiche agiscono come controllo, a causa dell'influenza sull'erodibilità dei materiali di superficie e sulla capacità di infiltrazione. La densità di drenaggio, ad esempio, è inversamente proporzionale all'infiltrazione e pertanto risulta essere più bassa nelle reti sviluppate su formazioni sabbiose rispetto a quelle in cui si ha una presenza di argille impermeabili. Una conferma a tal proposito è stata fornita dalla recente indagine di Gaudio et al. [13] condotta su 10 porzioni quadrate di reticoli calabresi, sviluppati su rocce distinte in due grandi classi: la plutonico-metamorfica

(PM) e la sedimentaria coerente (SC). I risultati infatti hanno mostrato che con il passaggio da una rete sviluppata su base SC ad una PM, si perviene ad un incremento degli esponenti di Lipschitz-Hölder, quest'ultimo del tutto attendibile anche in virtù del legame tra la probabilità minima e massima e la risoluzione con cui si esegue la misura per la stima delle dimensioni frattali.

Come precedentemente anticipato, i risultati dell'indagine sul controllo litologico risultano di notevole importanza per la caratterizzazione della risposta idrologica in termini di misure multifrattali e quindi di spettri delle singularità. Infatti, valori più alti delle dimensioni frattali e degli esponenti di Lipschitz-Hölder corrispondono a picchi di piena più elevati, come si è visto nella definizione del primo idrogramma di piena a base multifrattale denominato *Multifractal Instantaneous Unit Hydrograph* (MIUH) [30, 31]. Tale modello

affonda le proprie radici nell'estensione dei concetti della meccanica statistica per la derivazione dell'idrogramma di un bacino idrografico.

Questi sviluppi, forniti da Lienhard [32] e Lienhard e Meyer [33] agli inizi degli anni Sessanta del secolo scorso, hanno mostrato come un'ampia classe di funzione di densità di proba-

bilità, tra cui la distribuzione dei tempi di residenza di un bacino, sia riconducibile alla distribuzione di probabilità gamma generalizzata. Gli sviluppi descritti, in accordo alla natura autosomigliante e multifrattale delle reti fluviali, hanno permesso di definire la seguente legge di distribuzione dei tempi di percorrenza:

$$f(t) = \frac{\bar{t}^\alpha}{k} \max\left(\frac{t}{k}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{k}\right)^\alpha\right], \quad (4)$$

in cui  $\alpha_{max}$  rappresenta il massimo esponente di Lipschitz-Hölder stimabile direttamente dallo spettro multifrattale,  $f(\alpha_q)$ , e  $k$  il parametro di scala temporale, legato alle caratteristiche idrauliche dei canali, ossia alla dinamica di trasferimento dei deflussi superficiali verso la sezione di chiusura del bacino, e quindi al tempo di ritardo. Il modello, a soli due parametri, è stato tarato su tre eventi di piena registrati nella stazione idrometrografica di Grascio sul fiume Corace e permette una riduzione dell'incertezza sul picco di piena con errori inferiori al 2%.

In Figura 4 è mostrato, per l'evento del gennaio 1964, il pluviogramma efficace e gli idrogrammi di piena registrato e simulato con il MIUH con i valori rispettivamente di  $k=9,3$  ore, e  $\alpha_{max}=2,10$ . Come è facile intuire, nel MIUH si tiene conto della multifrattalità della rete e si riscontra che nella famiglia di dimensioni frattali generalizzate,  $D_q$ , quelle che minimizzano la portata al colmo di piena sono relative a pesi,  $q$ , rappresentati da elevati valori dell'esponente di

Lipschitz-Hölder i quali indicano che le aree drenanti in cui la misura è meno densa, concorrono in maniera determinante alla formazione della piena.

Le restanti aree, caratterizzate da elevati valori della misura, contribuiscono alla formazione dell'idrogramma di piena con un certo ritardo, ovvero intervengono principalmente nella fase decrescente o di esaurimento dell'idrogramma, manifestando in tal modo un più marcato effetto di laminazione, verosimilmente imputabile a situazioni locali di piccoli invasi.

Del resto si può anche dire che ad alti valori della misura corrispondono porzioni della rete idrografica caratterizzate da notevole numero e marcata sinuosità delle aste, parametro quest'ultimo correlato alla pendenza delle aste medesime e, quindi, nelle aree con alta concentrazione della misura si riscontra un più lento trasferimento dei deflussi superficiali verso valle, cioè un più accentuato effetto di laminazione, dovuto alle pendenze relativamente basse dei rami.

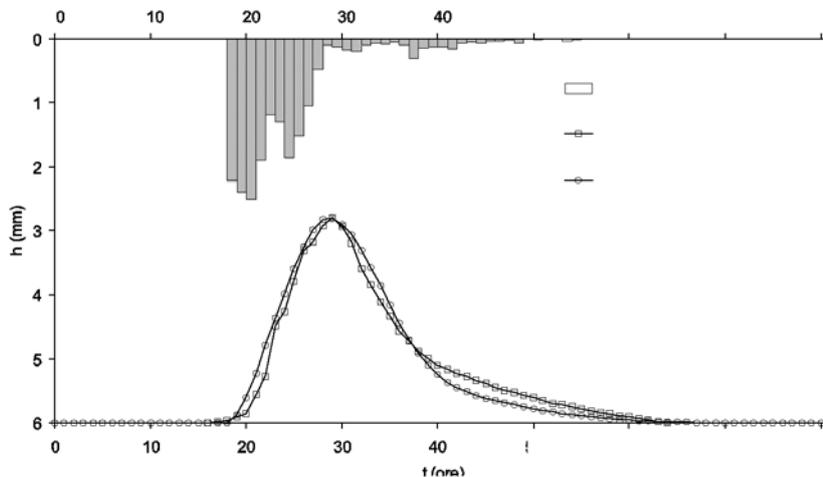


Figura 4: pluviogramma efficace e idrogrammi di piena registrato e simulato con il MIUH per l'evento del gennaio 1964 (Corace)

### 3. Considerazioni conclusive

La geometria frattale, unitamente al campo delle misure multifrattali, riveste un ruolo di fondamentale importanza per la comprensione dei meccanismi che regolano i deflussi superficiali dell'acqua sul terreno sia ad una scala di bacino, cioè rappresentata dall'intero sviluppo planimetrico delle rete fluviale all'interno dello spartiacque, sia ad una scala locale o per meglio dire di canale le cui peculiarità sono strettamente connesse allo sviluppo unicursale ovvero pluricursale di ciascun singolo corso.

La natura idrografica viene pertanto caratterizzata da un nuovo descrittore morfometrico rappresentato dalla dimensione frattale la quale

rappresenta l'invariante di riscaldamento (*scaling*) nelle varie misure di scala, cioè lunghezze e aree, che caratterizzano in generale tutti i corsi d'acqua naturali.

Il passaggio inoltre verso scale locali di maggiore dettaglio permette una maggiore comprensione e valutazione anche di tutti quei processi fisici correlati a grandezze quali le portate e il trasporto solido nelle biforcazioni e nelle confluenze, l'assortimento granulometrico, il deposito e lo stesso meccanismo di formazione dell'intera rete di canali. Pertanto, il complesso acqua-suolo-reticolo idrografico, alla luce delle recenti scoperte, risulta ben interpretato dalla geometria frattale, dai campi multifrattali e dalla topologia delle reti.

### MASSIMO VELTRI

*Nato a Cosenza nel 1947, è laureato in ingegneria al Politecnico di Milano. È professore ordinario di Idraulica nella facoltà di Ingegneria dell'Università della Calabria. Autore di oltre 50 pubblicazioni scientifiche, e di tre libri a stampa, attualmente studia la geometria multifrattale applicata alle reti idrografiche. È stato per due legislature senatore della Repubblica. membro della XIII Commissione Territorio e Ambiente, ha presentato dieci disegni di legge come primo firmatario, ha proposto, ottenuto e condotto a termine i lavori di una Commissione Bicamerale per lo studio e le proposte in materia di difesa del suolo, pubblicati per i tipi della tipografia del Senato, Roma.*

#### Contatti:

Università della Calabria  
tel. 0984.496568

Ponte Pietro Bucci  
fax 0984.393031

87030 Rende(CS)  
Email: massimo.veltri@tin.it

### SAMUELE DE BARTOLO

*Nato a Crotona nel 1967, è dottore di ricerca in Ingegneria Idraulica per l'Ambiente e il Territorio. Ha svolto, come contrattista, attività di ricerca presso l'Istituto di Ricerca per la Protezione Idrogeologica (IRPI) nell'Italia Meridionale e Insulare di Rende (CS). Attualmente collabora ai corsi di Idraulica I e Idraulica II per Ingegneria Civile Nuovo Ordinamento e svolge come assegnista attività di ricerca in materia di misure multifrattali applicate alle dinamiche fluviali e al trasporto solido e di misure fluidodinamiche in turbolenza con strumentazione LDV e PIV.*

#### Contatti:

Università della Calabria  
tel. 0984.496568

Ponte Pietro Bucci  
fax 0984.494050

87030 Rende(CS)  
Email: debartolo@dds.unical.it

### Riferimenti

- [1] Horton, R.E. (1932), Transactions of the American Geophysical Union (AGU).
- [2] Horton, R.E. (1945), Geological Society American Bulletin.
- [3] Mandelbrot, B.B. (1982), The fractal geometry of nature, W.H. Freeman and Co, New York.
- [4] Shreve, R.L. (1969), Journal of Geology.
- [5] Rodriguez-Iturbe I. and Rinaldo, A. (1997), Fractal river basin: chance and self-organization, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Ijjasz-Vasquez, E.J., Rodriguez-Iturbe, I. and Bras, R.L. (1992), Geomorphology.
- [7] De Bartolo, S., Maiolo, M., Veltri, M. e Veltri, P. (1995), Idrotecnica.
- [8] De Bartolo, S., Gabriele, S., and Gaudio, R. (2000), Hydrology and Earth System Sciences.
- [9] De Bartolo, S., Veltri, M. e Primavera, L. (2003), L'Acqua.

- [10] De Bartolo, S., Gaudio, R. and Gabriele, S. (2004), *Water Resources Research*.
- [11] De Bartolo, S., Veltri, M. e Primavera, L. (2005), *Journal of Hydrology*.
- [13] Gaudio, R., De Bartolo, S., Primavera, L., Gabriele, S. and Veltri, M. (2006), *Journal of Hydrology*.
- [14] Strahler, A.N. (1952), *Geological Society America Bulletin*.
- [15] Strahler, A.N. (1957), *Transaction of the American Geophysical Union*.
- [16] La Barbera, P. and Rosso, R. (1987), *EOS Transactions of the American Geophysical Union (AGU)*.
- [17] Mandelbrot, B.B. (1975), *Les objets fractals: forme, hazard et dimension*, Flammarion, Paris.
- [18] Mandelbrot, B.B. (1977), *Fractals: from, chance and dimension*, W.H. Freeman and Co, San Francisco.
- [19] Tarboton, D. G., Bras, R. L. and Rodriguez-Iturbe, I. (1988), *Water Resources Research*.
- [20] Claps, P., and Oliveto, G. (1996), *Water Resources Research*.
- [21] Beauvis, A.A. and Montgomery, D.R. (1997), *Geology*.
- [22] Helmlinger, K. R., Kumar, P. and Foufoula-Georgiou, E. (1993), *Water Resources Research*.
- [23] Nikora, V.I., and Sapozhnikov, V.B. (1993), *Water Resources Research*.
- [24] Malcai, O. Lidar, D.A., Biham, O. and Avnir, D. (1997), *Physical Review E*.
- [25] Frisch, U. and Parisi, G. (1985), in M. Ghil, R. Bensì and G. Parisi (eds.), *Turbulence in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, North-Holland, New-York.
- [26] Badii, R. and Politi, A. (1984), *Physical Review Letters*.
- [27] Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. and Shraiman, B. I. (1986), *Physical Review A*.
- [28] Hentschel, H. G. E. and Procaccia, I. (1983), *Physica D*.
- [29] Renyi, A. (1955), *Acta Mathematica Hungarica*.
- [30] De Bartolo S.G., Ambrosio L., Primavera L. e Veltri M., (2003), *Giornata di studio 'La difesa idraulica del territorio'*, Trieste.
- [31] Veltri, M., Gabriele, S., De Bartolo, S. G., Gaudio, R. e Primavera, L. (2004), *I Workshop MODECI, Modelli matematici per la simulazione di Catastrofi Idrogeologiche*, a cura di P. Versace, AGM, Castrovillari (CS).
- [32] Lienhard, H.J. (1964), *Journal of Geophysical Research*.
- [33] Lienhard, H.J. and Meyer, P.L. (1967), *Quarterly of Applied Mathematics*.